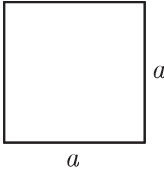
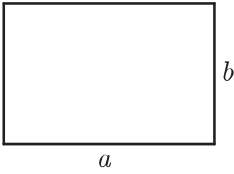
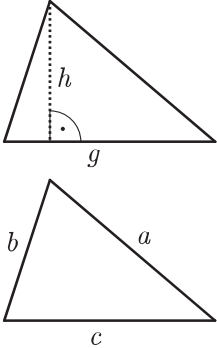
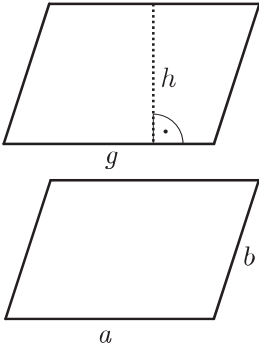
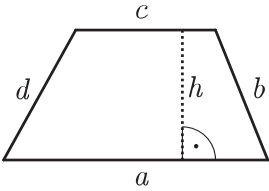
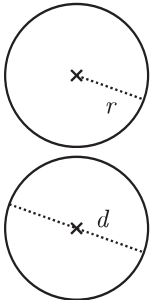
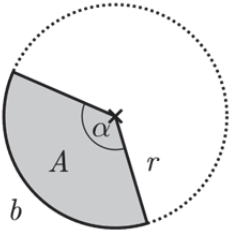
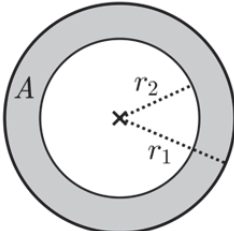
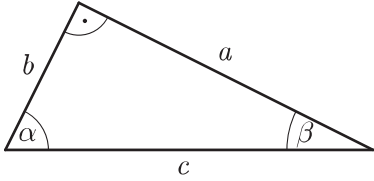
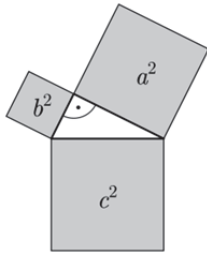


# Formelsammlung Mathematik – Zentrale Prüfungen 10

## Anforderungsniveau MSA

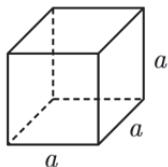
Ebene Figuren			
<p><b>Quadrat</b></p> <p>Flächeninhalt:  <math>A = a \cdot a = a^2</math></p> <p>Umfang:  <math>u = 4 \cdot a</math></p>		<p><b>Rechteck</b></p> <p>Flächeninhalt:  <math>A = a \cdot b</math></p> <p>Umfang:  <math>u = 2 \cdot a + 2 \cdot b</math></p>	
<p><b>Dreieck</b></p> <p>Flächeninhalt:  <math>A = \frac{g \cdot h}{2}</math></p> <p>Umfang:  <math>u = a + b + c</math></p>		<p><b>Parallelogramm</b></p> <p>Flächeninhalt:  <math>A = g \cdot h</math></p> <p>Umfang:  <math>u = 2 \cdot a + 2 \cdot b</math></p>	
<p><b>Trapez</b></p> <p>Flächeninhalt:  <math>A = \frac{a+c}{2} \cdot h</math></p> <p>Umfang:  <math>u = a + b + c + d</math></p>		<p><b>Kreis</b></p> <p>Radius: <math>r</math></p> <p>Durchmesser: <math>d = 2 \cdot r</math></p> <p>Flächeninhalt: <math>A = \pi \cdot r^2</math></p> <p>Umfang: <math>u = 2 \cdot \pi \cdot r</math></p>	
<p><b>Kreissektor</b></p> <p>Flächeninhalt:  <math>A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}</math></p> <p>Kreisbogen:  <math>b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}</math></p>		<p><b>Kreisring</b></p> <p>Flächeninhalt:  <math>A = A_1 - A_2</math>  <math>= \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2</math></p>	
Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck			
<p>In einem <i>rechtwinkligen</i> Dreieck gilt:</p>  <p>Die beiden <i>Katheten</i> <math>a</math> und <math>b</math> bilden einen rechten Winkel.</p> <p>Die <i>Hypotenuse</i> <math>c</math> ist die längste Seite des Dreiecks und liegt dem rechten Winkel gegenüber.</p>	<p><b>Satz des Pythagoras</b></p> $a^2 + b^2 = c^2$ 	<p><b>Trigonometrie</b></p> $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$	
Maßeinheiten			
<p><b>Länge</b></p> <p>Kilometer    Meter    Dezimeter    Zenti- meter    Milli- meter</p> <p>1 km = 1000 m</p> <p>1 m = 10 dm</p> <p>1 dm = 10 cm</p> <p>1 cm = 10 mm</p>		<p><b>Fläche</b></p> <p>Quadrat- meter    Quadrat- dezimeter    Quadrat- zentimeter    Quadrat- millimeter</p> <p>1 m<sup>2</sup> = 100 dm<sup>2</sup></p> <p>1 dm<sup>2</sup> = 100 cm<sup>2</sup></p> <p>1 cm<sup>2</sup> = 100 mm<sup>2</sup></p>	

**Geometrische Körper**

**Würfel**

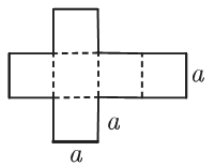
Volumen:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$



Oberfläche:

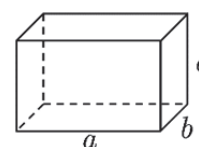
$$O = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$$



**Quader**

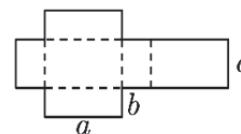
Volumen:

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Oberfläche:

$$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot c \cdot a$$



**Prisma**

Beispiel: Dreiecksprisma

Grundfläche:  $G$

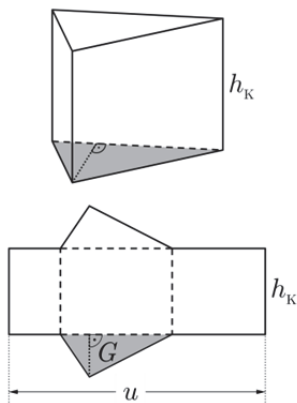
Höhe des Körpers:  $h_K$

Umfang der Grundfläche:  $u$

Volumen:  $V = G \cdot h_K$

Mantelfläche:  $M = u \cdot h_K$

Oberfläche:  $O = 2 \cdot G + M$



**Zylinder**

Grundfläche (Kreis):  $G = \pi \cdot r^2$

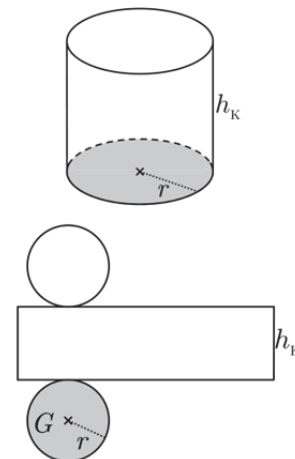
Höhe des Körpers:  $h_K$

Umfang der Grundfläche:  $u = 2 \cdot \pi \cdot r$

Volumen:  $V = G \cdot h_K$

Mantelfläche:  $M = u \cdot h_K$

Oberfläche:  $O = 2 \cdot G + M$



**Pyramide**

Beispiel: Quadratische Pyramide

Grundfläche:  $G$

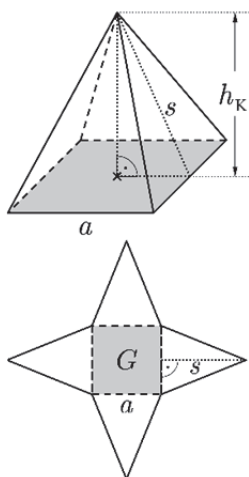
Höhe des Körpers:  $h_K$

Höhe der Seitenfläche:  $s$

Volumen:  $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$

Mantelfläche:  $M$

Oberfläche:  $O = G + M$



**Kegel**

Grundfläche (Kreis):  $G = \pi \cdot r^2$

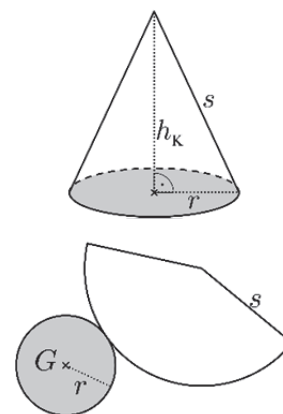
Höhe des Körpers:  $h_K$

Länge der Mantellinie:  $s$

Volumen:  $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$

Mantelfläche:  $M = \pi \cdot r \cdot s$

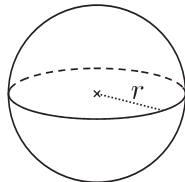
Oberfläche:  $O = G + M$



**Kugel**

Volumen:  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Oberfläche:  $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



**Maßeinheiten**

**Volumen**

Kubikmeter	Kubikdezimeter	Kubikzentimeter	Kubikmillimeter
1 m <sup>3</sup>	= 1 000 dm <sup>3</sup>	= 1 000 cm <sup>3</sup>	= 1 000 mm <sup>3</sup>
Liter (ℓ)	1 dm <sup>3</sup> = 1 ℓ	= 1 000 ml	1 cm <sup>3</sup> = 1 ml

**Masse**

Tonne	Kilogramm	Gramm	Milligramm
1 t	= 1 000 kg	= 1 000 g	1 g = 1 000 mg

### Zentrische Streckung und Ähnlichkeitsbeziehungen

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum  $Z$  und dem Streckfaktor  $k$  ( $k \neq 0$ ) wird jeder Punkt  $P$  auf einen Bildpunkt  $P'$  abgebildet. Es gilt:

- $Z, P$  und  $P'$  liegen auf einer Geraden.
- $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$
- $k > 0$ :  $P'$  und  $P$  liegen auf derselben Seite von  $Z$
- $k < 0$ :  $P'$  und  $P$  liegen auf gegenüberliegenden Seiten von  $Z$

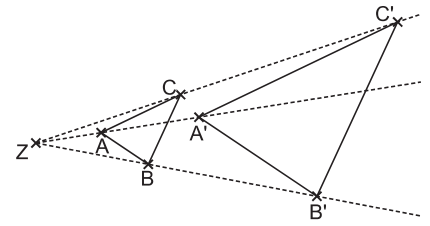
Beispiel: zentrische Streckung eines Dreiecks

$$k > 0$$

$$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \dots$$

außerdem gilt:

$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \dots$$



Original- und Bildfigur sind zueinander ähnlich, d.h. die Bildstrecken sind parallel zu den Originalstrecken und die Winkelgrößen bleiben erhalten.

### Prozent- und Zinsrechnung

#### Prozentrechnung

Grundwert:  $G \hat{=} 100\%$

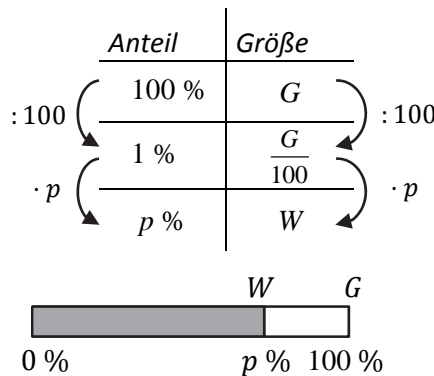
$$G = \frac{W}{p\%}$$

Prozentsatz:  $p\% = \frac{p}{100}$

$$p\% = \frac{W}{G}$$

Prozentwert:  $W$

$$W = G \cdot p\%$$



Prozentsätze zur Orientierung

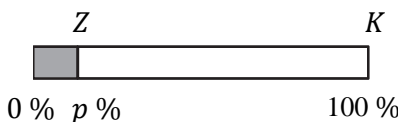
1 %	= $\frac{1}{100}$	= 0,01
5 %	= $\frac{1}{20}$	= 0,05
10 %	= $\frac{1}{10}$	= 0,1
25 %	= $\frac{1}{4}$	= 0,25
33,3 %	= $\frac{1}{3}$	= 0,3
50 %	= $\frac{1}{2}$	= 0,5

#### Zinsrechnung

Kapital:  $K \hat{=} 100\%$

Zinssatz:  $p\%$

Zinsen:  $Z$



Jahreszinsen

$$Z = K \cdot p\%$$

Monatszinsen

m: Anzahl der Monate

$$Z_m = K \cdot p\% \cdot \frac{m}{12}$$

Tageszinsen

t: Anzahl der Tage

$$Z_t = K \cdot p\% \cdot \frac{t}{360}$$

#### Zinseszins

Anfangskapital:  $K_0$

Kapital mit Zinseszins Jahr für Jahr

Zinsfaktor:  $q = 1 + \frac{p}{100}$

1. Jahr:  $K_1 = K_0 \cdot q$

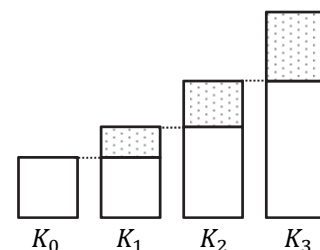
2. Jahr:  $K_2 = K_1 \cdot q$

⋮ ⋮

Anzahl der Jahre:  $n$

Kapital mit Zinseszins nach  $n$  Jahren

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$



### Diagramme

#### Werte darstellen

Säulendiagramm



#### Anteile darstellen

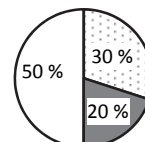
Streifendiagramm



Balkendiagramm



Kreisdiagramm



$$100\% \hat{=} 360^\circ$$

$$10\% \hat{=} 36^\circ$$

$$1\% \hat{=} 3,6^\circ$$

## Daten

### Häufigkeiten

#### absolute Häufigkeit

Die absolute Häufigkeit gibt an, wie oft ein bestimmter Wert (*Merkmal/Ergebnis/Ereignis*) bei einer Befragung/einem Experiment auftritt.

#### relative Häufigkeit

Die relative Häufigkeit gibt das *Verhältnis* von der absoluten Häufigkeit eines Wertes zu der Anzahl aller Werte an.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Anzahl aller Werte}}$$

### Daten sammeln und ordnen

#### Urliste

In einer Urliste liegen alle Werte einer Befragung in der Reihenfolge vor, wie sie beobachtet wurden.

#### Rangliste

In einer Rangliste liegen alle Werte einer Befragung in geordneter Reihenfolge vor, vom kleinsten zum größten Wert sortiert.

### Mittelwerte

#### arithmetisches Mittel $\bar{x}$

Das arithmetische Mittel (*Durchschnittswert*) ist die Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl  $n$  der Werte.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

#### Median $\tilde{x}$

Der Wert, der in der Mitte einer Rangliste steht, heißt Median (*Zentralwert*).

Median bei ungerader Anzahl :

38 ; 39 ; 39 ; 40 ; 43  
Median

$$\tilde{x} = 39$$

Median bei gerader Anzahl :

38 ; 39 ; 40 ; 45  
Median

$$\tilde{x} = 39 \text{ oder } \tilde{x} = 40$$

bzw.:

$$(39 + 40) : 2 = 39,5$$

### Statistische Kennwerte im Boxplot darstellen

Minimum:  $x_{\text{Min}}$

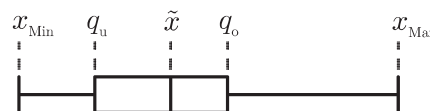
Maximum:  $x_{\text{Max}}$

Spannweite:  $x_{\text{Max}} - x_{\text{Min}}$

Median:  $\tilde{x}$

unteres Quartil:  $q_u$  (Median der unteren Hälfte der Werte)

oberes Quartil:  $q_o$  (Median der oberen Hälfte der Werte)



## Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace-Versuche sind Zufallsversuche, bei denen jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist.

Für die Wahrscheinlichkeit  $P$  eines Ereignisses  $E$  gilt dann:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

### Mehrstufige Zufallsversuche

Mehrstufige Zufallsversuche lassen sich in einem Baumdiagramm darstellen. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit Hilfe der Pfadregeln berechnen.

#### 1. Pfadregel (Produktregel)

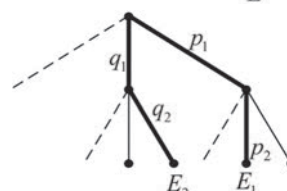
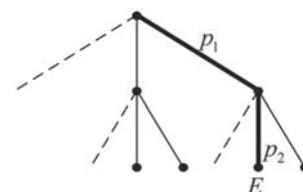
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses  $E$  ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades.

$$P(E) = p_1 \cdot p_2$$

#### 2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses  $E$  ist gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse.

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) = p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$$



## Funktionen

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Dabei wird jeder Ausgangsgröße genau eine Größe zugeordnet.  
Eine Funktion kann auf unterschiedliche Weise angegeben werden:

Wortform

Zuordnungsvorschrift

Wertetabelle

Graph

Beispiel:

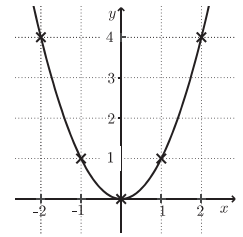
$$x \mapsto x^2$$

„Jeder Zahl wird ihre  
Quadratzahl zugeordnet.“

Funktionsgleichung

$$y = x^2 \quad \text{oder} \quad f(x) = x^2$$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Schnittpunkte und Berührungspunkte mit den Koordinatenachsen:

Wenn  $f(x_0) = 0$ , dann ist  $x_0$  eine Nullstelle von  $f$ . Der Graph von  $f$  schneidet oder berührt die  $x$ -Achse im Punkt  $(x_0 | 0)$ .

Wenn der Graph einer Funktion  $f$  die  $y$ -Achse schneidet, dann ist an der Stelle  $x = 0$  der Schnittpunkt mit den Koordinaten  $(0 | y_0)$ .

## Lineare Funktionen

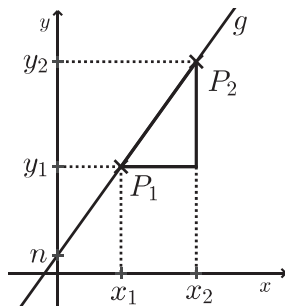
allgemeine Geradengleichung

$$g: y = m \cdot x + n$$

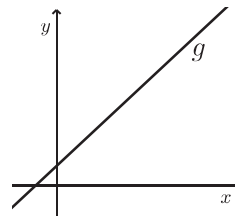
Steigung der Geraden

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad x_2 \neq x_1$$

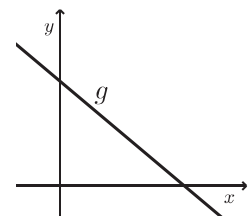
$y$ -Achsen-Abschnitt:  $n$



$m > 0$   
die Gerade  $g$  steigt



$m < 0$   
die Gerade  $g$  fällt

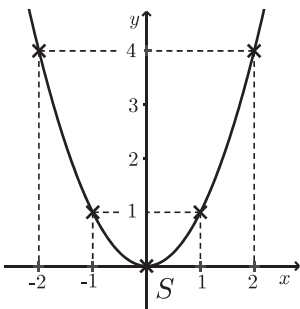


## Eigenschaften von quadratischen Funktionen

Normalparabel

$$y = x^2$$

Scheitelpunkt:  $S(0|0)$

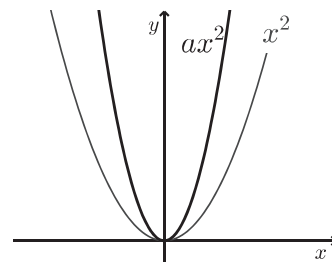


gestreckte / gestauchte Parabel:

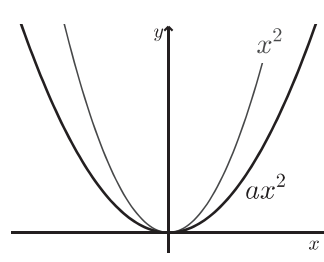
$$y = a \cdot x^2$$

Streckfaktor:  $a$ ,  $a \neq 0$

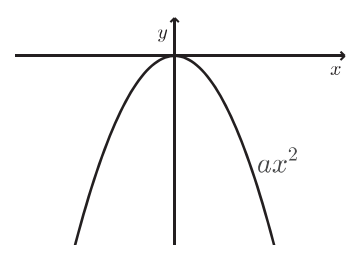
Die Parabel ist  
gestreckt, wenn  
 $a > 1$



Die Parabel ist  
gestaucht, wenn  
 $0 < a < 1$



Die Parabel ist nach  
unten geöffnet, wenn  
 $a < 0$



allgemeine Form

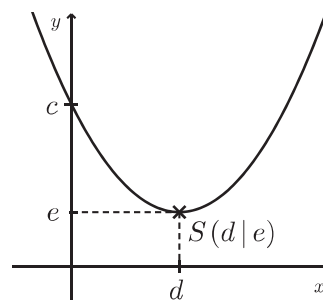
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad (a \neq 0)$$

Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $(0|c)$

Scheitelpunktform

$$y = a \cdot (x - d)^2 + e, \quad (a \neq 0)$$

Scheitelpunkt:  $S(d|e)$



**Exponentialfunktionen und exponentielles Wachstum**

allgemeine Form

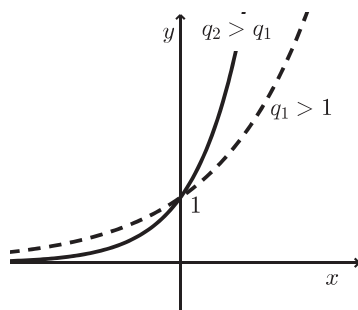
$$y = q^x \quad (q \in \mathbb{R}^+)$$

Definitionsbereich:  $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich:  $y \in \mathbb{R}^+$

Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:  $(0|1)$

Kein Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse

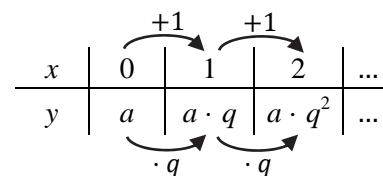


exponentielles Wachstum

$$y = a \cdot q^x \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{R}^+)$$

Anfangswert (Startwert):  $a$

Wachstumsfaktor:  $q$

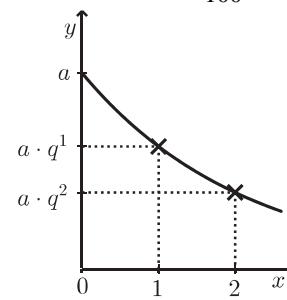
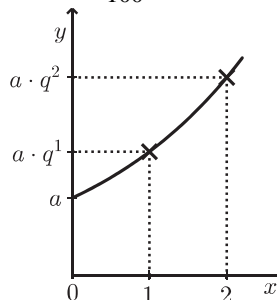


prozentuale Zunahme um  $p\%$ :

prozentuale Abnahme um  $p\%$ :

$$q > 1, q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$0 < q < 1, q = 1 - \frac{p}{100}$$



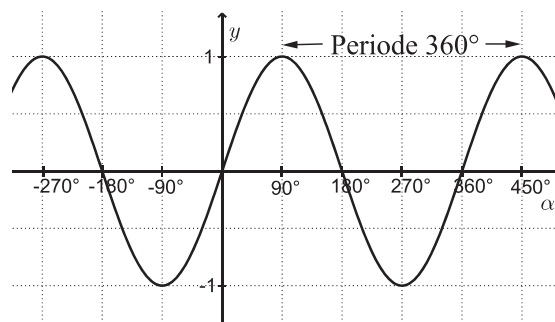
**Sinusfunktion**

$$y = \sin \alpha$$

Wertebereich:  $-1 \leq y \leq 1$

Periode:  $360^\circ$ , also

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 360^\circ)$$



**Binomische Formeln**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

**Quadratische Gleichungen**

Normalform:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Lösung: 
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \text{ wenn } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

Es gibt keine Lösung, wenn 
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

**Potenz- und Wurzelgesetze**

**Potenzgesetze**

$m, n \in \mathbb{Q}$ , wenn  $a, b \in \mathbb{R}^+$  oder  $m, n \in \mathbb{Z}$ , wenn  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

**Wurzelgesetze**

$a, b \in \mathbb{R}_0^+$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$